数理解析研究所講究録
494巻 1983年 236-247

ＶＬＳＩモデルへのグラフの埋め込みについて

電通大　戸田誠之助（Seinosuke Toda）
笠井琢美　（Takumi Kasai）

１．はじめに

最近のＶＬＳＩ技術の急速な進歩によって，大規模な論理回路を１チップ上に実現することが可能になってきている。これにともない，回路をいかに効率よくチップ上に埋め込むかという問題が議論されている。

この問題は，ＶＬＳＩを表わす平面格子Gpに与えられたグラフＧを埋め込む問題として定式化され，その効率の尺度としてGpの大きさを表わす面積がとられる。いくつかのグラフのクラスに対し，面積の上下界が知られている。一方，Rosenberg［２］は，ＶＬＳＩモデルの一般化として３次元格子を考え，３次元格子にグラフを埋め込む問題を扱っている。ここでの効率の尺度は，体積である。［２］において，いくつかのグラフのクラスの体積が面積に比べて漸近的により小さくなることが示されている。例えば，n－superconcentrator Gに対し，Gの面積は，$\Omega(n^2)$ 必要であるが［1］，Gの体積は $O(n\sqrt{n})$ で十分である。

3次元モデルの実際的な意味を評価することは困難であるが，配線を空間的にとらえることによって，従来の平面格子への埋め込みに比べて，3次元格子への埋め込み法は，より容易に得られると思われる。従って，もしグラフの平面格子への埋め込みと3次元格子への埋め込みの関係が示されれば，3次元格子への埋め込み法は，平面格子への埋め込み法に対し，ある示唆を与えるであろう。

そこで，本論文では，次数が高々4のグラフGに対し，Gの平面格子への埋め込みと3次元格子への埋め込みとの関係を示す。更に，Gの3次元格子へのある統一的な埋め込み法を示す。最後に，これらの結果の応用として，準外平面グラフが頂点数に比例した面積で平面格子に埋め込み可能であることを示す。（尚，この一部の結果が［1］ですでに得られていることを，本論文執筆中に大阪大学　萩原兼一氏によって指摘された）

2.　諸定義

本節では，以後の議論に必要な基本的概念を定義する。

〈定義2．1〉　グラフGは，対（V，E）である。ここで，Vは頂点の集合であり，$E \subseteq \{X \mid X \subseteq V, |X| = 2\}$は辺の集合である。辺$e = \{u, v\}$に対し，辺eと頂点u，vは接続しているという。また，u，vを辺eの端点という。頂点$v \in V$の次数は，vに接続する辺の数であり，$\deg_G(v)$で表わす。グラフGの次数$\deg(G)$は，Gの頂点の次数の最大値である。

辺の列$P = \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \cdots, \{v_{k-1}, v_k\}$（$k > 0$）をG上の道という。このとき，$v_0$，$v_k$を道Pの端点という。また，$v_0 = v_k$なるとき，道Pを閉路という。道Pが初等的であるとは，$v_0, v_1, v_2, \cdots, v_k$が全て異なるときをいう。道PとP′が辺素であるとは，PとP′が互いに共通な辺をもたないときをいう。

グラフ$G' = (V', E')$がGの部分グラフであるとは，$V' \subseteq V$かつ$E' \subseteq E$なるときをいう。更に，G′がGの全域部分グラフであるとは，$V' = V$かつ$E' \subseteq E$かつ任意の頂点$u, v \in V$に対し，uとvの間の道がGにおいて存在するならば，G′においてもuとvの間の道が存在するときをいう。

Vの部分集合V′によるGの誘導部分グラフ〈V′〉は，頂点集合としてV′をもち辺集合として$E' = \{X \mid X \subseteq V', |X| = 2\} \cap E$をもつGの部分グラフである。Eの部分集合E′によるG

の辺誘導部分グラフ$\langle E' \rangle$は，E'の辺に接続する頂点からなる集合を頂点集合としてもち，E'を辺集合としてもつGの部分グラフである。

自然数$n \geq 1$に対し，$[n] = \{ i \mid 1 \leq i \leq n \}$とする。グラフ$G = (V, E)$が$n$−彩色可能であるとは，ある関数$\varphi : V \to [n]$が存在して，任意の$u$，$v \in V$に対し，$\{u, v\} \in E$ならば$\varphi(u) \neq \varphi(v)$なるときをいう。また，関数$\varphi$を$G$の$n$−彩色という。グラフ$G$が$n$−彩色可能であるような最小の$n$を$G$の染色数と呼び，$\chi(G)$で表わす。

以後の議論では，連結グラフのみを扱う。従って，グラフというときは常に連結グラフであるとする。

〈定義２．２〉　$\mathbb{N}$を自然数全体とする。$\mathbb{N}^3$の２元$u = \langle i, j, k \rangle$，$v = \langle i', j', k' \rangle$の間の距離$d(u, v)$を$d(u, v) = |i - i'| + |j - j'| + |k - k'|$で定める。自然数$I$，$J$，$K \geq 1$に対し，$V(I, J, K) = \{ \langle i, j, k \rangle \mid 0 \leq i < I,\ 0 \leq j < J,\ 0 \leq k < K \}$，$E(I, J, K) = \{ \{u, v\} \mid u, v \in V(I, J, K),\ d(u, v) = 1 \}$とする。立体格子$G$は，$V = V(I, J, K)$かつ$E \subseteq E(I, J, K)$なるグラフ$(V, E)$である。この$I$，$J$，$K$を各々$G$の幅，長さ，高さといい，$\chi(G)$， Y(G)，Z(G)で表わす。Z(G)＝1なるとき，立体格子Gを平面格子という。

立体格子G＝（V，E）に対し，Gの頂点を格子点と呼びGの辺を格子辺と呼ぶ。また，Gの格子辺 $e=\{\langle i,j,k\rangle,\langle i',j',k'\rangle\}$ に対し，$k=k'$ のとき e を層内辺と呼び，$k\neq k'$ のとき e を層間辺と呼ぶ。格子点の集合 $V_m=\{\langle i,j,k\rangle\in V \mid k=m\}$（$0\leq m<Z(G)$）によるGの誘導部分グラフ $\langle V_m\rangle$ をGの第m層と呼ぶ。

〈定義2．3〉　$G_1=(V_1,E_1)$，$G_2=(V_2,E_2)$ をグラフとする。G_1 の G_2 への埋め込みは，対 (φ_1,φ_2) である。ここで，φ_1 は V_1 から V_2 への単射であり，φ_2 は E_1 から E_2 上の初等道全体への単射である。更に，(φ_1,φ_2) は以下の条件を満たす。

1）任意の辺 $e=\{u,v\}\in E_1$ に対し，$\varphi_2(e)$ の端点は $\varphi_1(u)$ と $\varphi_1(v)$ である。

2）任意の e，$e'\in E_1$ に対し，$\varphi_2(e)$ と $\varphi_2(e')$ は互いに辺素である。

3）任意の辺 $e\in E_1$ に対し，$\varphi_2(e)$ は端点以外で φ_1 による像を含まない。

G_1 の G_2 への埋め込み (φ_1,φ_2) が存在するとき，G_1

はG_2に埋め込み可能であるといい，$G_1 \sqsubset G_2$で表わす。

〈定義２、４〉 $\mathcal{G}_d$を立体格子全体とする。$\mathcal{G}_p$を平面格子全体とする。次数が高々４のグラフ$G=(V, E)$に対し，Gの埋め込み体積（単に体積という）VOL(G)を，

$$VOL(G)=\min\{X(G')\cdot Y(G')\cdot Z(G') \mid G \sqsubset G',\ G' \in \mathcal{G}_d\}$$

で定義する。また，Gの埋め込み面積（単に面積という）AREA(G)を，

$$AREA(G)=\min\{X(G')\cdot Y(G') \mid G \sqsubset G',\ G' \in \mathcal{G}_p\}$$

で定義する。

３． 面積・体積の上界

本節では，次数が高々４のグラフに対する面積と体積の関係を示す。更に，層染色数と呼ばれるグラフの不変数を導入し，層染色数によって面積・体積の上界を与える。

３．１ 面積と体積の関係

グラフGの立体格子G_dへの埋め込みが与えられたとき，Gのある平面格子G_pへの埋め込みを構成する。これより，Gの面積と体積の関係が示される。まず，この構成を容易にするため，次の補題で述べる形に，Gの立体格子への埋め込みを変形する。

〈補題3．1〉 $G=(V, E)$ を次数が高々4のグラフとする。Gの立体格子 $G_d=(V_d, E_d)$ への埋め込み (φ_1, φ_2) が与えられたとき，次を満たす立体格子 $G_d'=(V_d', E_d')$ とGの G_d' への埋め込み (φ_1', φ_2') が存在する。

i) $VOL(G_d') = 9\ VOL(G_d)$

ii) $deg(G_d') \leq 4$

iii) G_d' において，格子点 $\langle i, j, k\rangle$ に接続する層間辺が存在するとき，G_d' は層内辺 $\{\langle i-1, j, k\rangle, \langle i, j, k\rangle\}$，$\{\langle i, j, k\rangle, \langle i, j+1, k\rangle\}$ を含まない。

（証明略）

〈定理3．1〉 $G=(V, E)$ を次数が高々4の任意のグラフとする。また，$G_d=(V_d, E_d)$ を $VOL(G)$ を与える立体格子とし，$M=\min(X(G_d), Y(G_d), Z(G_d))$ とする。このとき，

$$9 \cdot M \cdot VOL(G) \geq AREA(G)$$

が成り立つ。

（略証） 補題3．1によって得られる立体格子を $G_d'=(V_d', E_d')$ とおく。このとき，$deg(G_d') \leq 4$ より，G_d' は平面格子へ埋め込み可能である。また，$AREA(G_d') \leq VOL(G_d')$ となることは容易に示すことができる。よって，補題3．1より，$G \subset G_d'$ であるから，$AREA(G_d') \geq AREA(G)$

となり，定理の不等式を得る。　　　　　　　　（証明終）

〈系 3．1〉　次数が高々4の任意のグラフGに対し，
$AREA(G) = O(VOL(G)^{\frac{4}{3}})$ が成り立つ。　　　（系終）

3．2　層染色数による面積・体積の上界

幾つかのグラフのクラスに関しては，効率のよい埋め込みアルゴリズムが知られている。ここでの効率の尺度は面積である。今，そのようなクラスを$\mathcal{G}$とおく。$\mathcal{G}$に対する埋め込みアルゴリズムを用いてより広いクラスに対する効率のよい埋め込みアルゴリズムを与えることができる。これは，次のような方法による。

グラフG＝（V，E）が与えられたとき，Gの全域部分グラフでかつ$\mathcal{G}$に属するものを1つ選択する。この全域部分グラフをG'＝（V，E'）とおく。$\mathcal{G}$に対する埋め込みアルゴリズムを用いて，G'の平面格子G_pへの埋め込みを求める。次に，$E-E'$の各辺を"空間的"に実現する。これより，Gのある立体格子G_dへの埋め込みが得られる。このとき，グラフGの体積は$Z(G_d)$によって決定される。そこで，本節では，層染色数と呼ばれるグラフのある不変数を導入する。層染色数は，$Z(G_d)$の上界を与える概念である。従って，Gの

層染色数と AREA(G′) の積によって VOL(G)の上界が与えられる。

〈定義3.1〉 𝔾をグラフ全体とする。𝔾の部分クラス ℙを性質と呼ぶ。グラフGが性質ℙをもつ（または，性質ℙを満たす）とは，$G \in \mathbb{P}$ なるときをいう。性質ℙが性質ℙ′に関して全域的であるとは，任意のグラフ$G \in \mathbb{P}'$に対し，ℙを満たすGの全域部分グラフG′が存在するときをいう。性質ℙが𝔾に関して全域的であるとき，単に，ℙは全域的であるという。

〈定義3.2〉 ℙを全域的性質とする。$G=(V, E)$をグラフとし，$G'=(V, E')$をGのℙを満たす全域的部分グラフとする。$E-E'$からG′上の道全体への関数pが(G, G′)－path assignment であるとは，任意の辺$e=\{u, v\} \in E-E'$に対し，$p(e)$がu，vを端点とするG′上の初等導であるときをいう。G，G′，pが与えられたとき，ℙに関する拡張線グラフ$L(G, G', p)=(V_L, E_L)$を，$V_L=E-E'$，$E_L=\{\{e_1, e_2\} \mid p(e_1)$ と $p(e_2)$が共通辺をもつ$\}$で定める。

ℙに関するグラフGの層染色数$I_{\mathbb{P}}(G)$を

$$I_{\mathbb{P}}(G) = \min_{G', p} \chi(L(G, G', p))$$

で定める。ただし，$G \in \mathbb{P}$のときは，$I_{\mathbb{P}}(G)=1$とする。

以上の概念を用いると，次の定理が得られる。

〈定理3．2〉　$\mathbb{P}$を全域的性質とする。G＝（V，E）を次数が高々4の任意のグラフとし，G′＝（V，E′）を$I_{\mathbb{P}}(G)$を与えるGの$\mathbb{P}$を満たす全域部分グラフとする。$C = I_{\mathbb{P}}(G) + 1$とするとき，次が成り立つ。

1）　$VOL(G) = O(C \cdot AREA(G'))$

2）　$AREA(G) = O(C^2 \cdot AREA(G'))$

（証明略）．

4．　定理の応用

木のクラスを$\mathbb{T}$とおくと，$\mathbb{T}$は明らかに全域的性質である。本節では，準外平面的と呼ばれるグラフの$I_{\mathbb{T}}(G)$の上界を与える。

〈定義4．1〉　G＝（V，E）を任意の平面グラフとする。Gの領域Rは，Rの境界上にある頂点の集合と辺の集合の無向グラフとして定義される。$R_i = (V_i, E_i)$をGの領域とする。特に，R_1をGの外領域とする。Gが<u>準外平面的</u>であるとは，任意のV_iに対し，$V_i \cap V_1 \neq \phi$となるときをいう。

〈補題4．1〉　G＝（V，E）を次数が高々4の平面グラフとする。また，$G^* = (V^*, E^*)$をGの双対グラフとする。

このとき，$I_J(G) \leq 4 \cdot rad(G^*)$ が成り立つ。ここで，$rad(G^*)$ は G^* の半径である。（補題終）

〈補題4．2〉 $G=(V, E)$ を次数が高々4の準外平面的グラフとし，G^* を G の双対グラフとする。このとき，$rad(G^*) \leq 2$ が成り立つ。（補題終）

〈定理（Valiant[3]）〉 次数が高々4の任意の木 $T=(V, E)$ に対し，$AREA(T)=O(|V|)$ が成り立つ。

以上の補題及び定理と定理3．2より，次の定理を得る。

〈定理4．1〉 次数が高々4の任意の準外平面的グラフ $G=(V, E)$ に対し，$AREA(G)=O(|V|)$ が成り立つ。（定理終）

5． 結 論

本論文では，グラフのVLSIモデルへの埋め込み問題に関し，従来の平面的VLSIモデルと3次元VLSIモデルの関係を示した。更に，グラフを3次元VLSIモデルへ埋め込む統一的な方法を示した。この方法によれば，$\mathcal{J} \leq \mathcal{G}_1 \leq \mathcal{G}_2 \leq \cdots$ となるグラフのクラスのある階層に対し，$\mathcal{G}_i$ の

埋め込みアルゴリズムが求まれば，g_{i+1}に対する埋め込みアルゴリズムでその面積の上界が$O(I_{g_i}(g_{i+1})^2 \cdot AREA(g_i))$となるものが得られる。このような階層的な形でより広いクラスの面積の上界を求めることが，今後の研究課題である。また，3．2節で示した方法以外に，統一的な埋め込み法を見出すこともより重要な研究課題である。

［謝 辞］ 文献［1］を提供して致いた大阪大学 萩原兼一氏に感謝致します。

［参考文献］

(1) Dolev, D. and Trickey, H.: "On Linear Area Embedding of Planar Graphs", STAN-CS-81-876, (Sept. 1981).
(2) Rosenberg, A.L.: "Three-Dimensional Integrated Circuitry", in "VLSI Systems and Computations", Kung, H.T. and et.al.ed., 69-80, (1981).
(3) Valiant, L.G.: "Universality Considerations in VLSI Circuits", IEEE Trans. on Comput. C-30(2), 153-157, (Feb. 1981).